

MATEMATIKA VERSENYFELADATOK

Zalaegerszeg, 2024. október 25.

1. Az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ halmaz minden elemét kiszínezzük pirosra vagy kékre. Tudjuk, hogy

- (a) a 4-es szám pirosra van színezve és van kék színű elem;
- (b) ha a, b különböző színűek és $a + b \leq 8$, akkor $a + b$ kék színű;
- (c) ha a, b különböző színűek és $ab \leq 8$, akkor ab piros színű.

Milyen módon lehetnek kiszínezve a halmaz elemei?

(25 pont)

2. Minden a, b pozitív egész számokból álló számpárra jelölje rendre $\text{lko}(a, b)$ és $\text{lkkt}(a, b)$ az a, b számok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét. Keressük meg az

$$ab + 63 = 20 \text{lkkt}(a, b) + 12 \text{lko}(a, b)$$

egyenlet összes megoldását a pozitív egész számokból álló számpárok halmazán.

(25 pont)

3. Legyen $ABCD$ egy olyan konvex négyszög, melyben $\angle ABC \geq 120^\circ$ és $\angle BCD \geq 120^\circ$. Igazoljuk, hogy ekkor $|AC| + |BD| \geq |AB| + |BC| + |CD|$, ahol $|XY|$ az XY szakasz hosszát, és $\angle XYZ$ az X, Y, Z csúcsú háromszög Y -nál levő szögének nagyságát jelöli.

(25 pont)

4. Legyen $x \neq 1, y \neq 1, x \neq y$, és

$$\frac{yz - x^2}{1 - x} = \frac{xz - y^2}{1 - y}.$$

Igazoljuk, hogy ekkor mindkét fenti tört értéke $x + y + z$.

(25 pont)